非线性科学漫谈

邓俊

引言

线性系统的主要特点是输出量值与输入量值成比例，且频率不变；而非线性系统的主要特点是输出量值与输入量值不成比例，且频率可能会变。但客观世界的本质是非线性的，线性系统只是对非线性现象的近似描述。因此，随着科学技术的进步，非线性科学的发展成为一个必然趋势。

简单来说，非线性科学是一门研究各类系统中非线性现象共同规律的交叉学科。每一门科学都有自己的非线性问题，并形成了各自的非线性学科分支。非线性科学不是这些非线性学科的简单综合，而是以各个非线性学科为基础逐步发展起来的综合性科学，致力于研究各种非线性现象和非线性系统的共同规律。

线性系统有普遍适用的研究方法（如傅里叶变换法），而非线性系统却没有这样的方法。目前，非线性科学形成了三个前沿理论：孤立子理论、分形理论和混沌理论，本文简要谈谈这三个理论。

孤立子（soliton）理论

孤立波

孤立子是从孤立波发展来的。

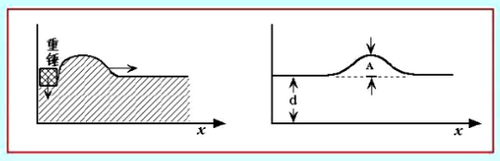
1834 年 8 月，英国科学家罗素（Russell）在运河边看到一只迅速前进的船突然停止时，被船所推动的一大团水却不停止，形成一个滚圆、光滑、轮廓分明的大水包继续前进。罗素骑马跟踪这个水包时发现，它完全浮在水面上，其大小、形状和速度变化很慢，直到 3 ~ 4 千米后才逐渐消失。

罗素将他发现的这种奇特的水波称为孤立波，并在其后半生专门从事孤立波的研究。他用大水槽模拟运河，并给水以适当的推动，再现了他所发现的孤立波。

遗憾的是，在罗素的有生之年，无法从理论上对孤立波现象给出圆满解释，他所发现的孤立波现象也未能引起人们的注意。

水槽中的实验

罗素在一长水槽的一端，用一重锤垂落入水中，反复的观察重锤激起的水浪的运动。



实验结论

水波移动速度 v、水的深度 d 及水波幅度 A 的关系为：

$$v^2 = B(d + A) \qquad B \text{ 为比例常数}$$

实验结果说明水波的运动速度与波幅高度有关，波幅高的速度较快，且波幅的宽度对高度之比也相对较窄。

孤立波

在罗素逝世 100 周年即之际 1982 年，人们在罗素发现孤立波的运河边树起了一座罗素像纪念碑，以纪念 148 年前他的这一不寻常的发现。

1895 年，两位荷兰数学家科特维格（Korteweg）和德弗雷斯（de Vries）在浅水长波和小振幅假定下建立了单向运动的非线性浅水波方程（即著名的 KdV 方程），从方程中求出了行波解，这一结果在理论上证明了孤立波的存在性。然而，这种波是否稳定？两个波碰撞后是否产生变形？这些问题长期得不到解答，以至于人们怀疑，既然方程是非线性偏微分方程，解的迭加原理不再成立，碰撞后解的形状很可能破坏，这种波是不稳定的，研究它没什么物理意义，导致对孤立波的研究再次陷入了沉寂。

KdV 方程：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)$$

线性变换得到的标准 KdV 方程：

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

孤立子

20 世纪 50 年代，一个计算机数值实验开始改变孤立波的命运。美国物理学家 Enrico Fermi 等人利用当时美国的 Maniac Ⅰ号计算机，对由存在弱非线性相互作用的 64 个谐振子组成的系统进行了数值计算实验，企图证实统计物理学中的“能量均分定理”。

初始时刻这些谐振子的所有能量都集中在某个振子上，其它 63 个谐振子的初始能量为零。按照“能量均分定理”，只要非线性效应存在，就会出现能量均分现象，即任何微弱的非线性相互作用都可导致由非平衡态向平衡态的过渡。但是，1955 年的计算结果却很意外，因为经过长时间的计算后，能量并没有均分到其它振子上去，绝大部分能量又回到了原先那个初始能量不为零的谐振子上。经典的“能量均分定理”竟然没有得到证实。这就是著名的 FPU 问题，它与催生相对论的迈克尔逊－莫雷实验一样，被认为是对传统科学的有力挑战。

令人遗憾的是，Fermi 等人当时并未能发现孤立波解，也未能得到正确解释。经后人的进一步研究才得到了孤立波解，使 FPU 问题得以解决。

在随后的数值实验中，人们发现孤立波碰撞后仍保持原有的形状和速度，即像是“透明地”穿过对方，并与物质粒子的弹性碰撞一样，遵守动量守恒和能量守恒，因此可以把孤立波当做原子或分子那样的粒子看待，于是将这种具有粒子特性的孤立波称为“孤立子”（soliton），以此来描述这种具有粒子性质的孤立波。

孤立子概念的提出，开启了孤立子理论研究的新时代，各个领域的科学家们陆续对孤立子投入了巨大的热情和兴趣，已逐步形成了较为完整、系统的孤立子理论。

孤立子理论的应用

到目前为止，可以说孤立子现象无所不在：宇宙涡旋星系的密度波、海上冲击波、等离子体、分子系统、生物系统、光纤中光的传输、激光的传播、超导 Josephson 结、磁学、结构相变、液晶等领域，都找到了孤立子神奇的身影，形状各异。孤立子这朵“数学物理之花”在大至宇宙的宇观世界、小至基本粒子的微观世界里显示出它奇妙的魅力，令越来越多的科学家倾心不已。

分形（Ftactal）理论

什么是分形？

分形：局部以某种形式（形态、结构、信息、功能、时间、能量等）与整体相似的特性叫分形。其实我们生活在一个分形的世界里，在日常生活中，分形现象随处可见，典型是西兰花和蕨类植物的叶子。磁铁也具有明显的分形特性，其中的任何一部分都像整体一样具有南北两极，且可以不断分割下去。

分形理论诞生于 20 世纪 70 年代中期，属于现代数学中的一个分支，基本特点是用分数维度的视角和数学方法来描述与研究客观事物，但其本质却是一种新的世界观和方法论。

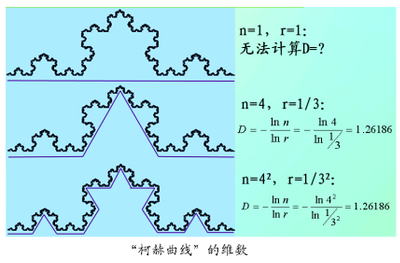
分形理论的创始人是美籍法国数学家曼德勃罗（Mandelbrot）：1967 年发表论文“英国的海岸线有多长？统计自相似与分数维度”，这是分形思想萌芽的重要标志；1973 年提出分形几何学的整体思想；1977 年出版著作《分形：形态、偶然性和维度》，标志着分形理论的正式诞生；1982 年出版专著《自然界的分形几何学》。

至此，分形理论初步形成：一大类复杂、无规的几何对象，如弯弯曲曲的海岸线、起伏不平的山脉、粗糙不堪的断面、变幻无常的浮云、九曲回肠的河流、纵横交错的血管、令人眼花缭乱的满天繁星等，其特点是极不规则或极不光滑，它们都是分形理论的研究对象。

分数维度

分形与维度观念的更新：如果用维度来度量分形图形性质，必须放弃维度一定是整数这个概念，分形图形是一种具有分数维度的图形。

豪斯道夫（Hausdorff）维度就是一种分数维度。设任意长度（或正方形、立方体）的线段（或面积、体积）为 1（无量纲），然后分为 n 等份，每一份的长度为 r，则有 $nXr^D=1$，进一步有 $D=-\lg n/\lg r$。对线段、正方形和正方体这样的规则图形来说，维度 D 分别是整数 1、2 和 3。对其它图形来说，其中的维度 D 就不一定恰好是整数了。“柯赫曲线”（Koch curve）就是一个著名的分数维度图形。



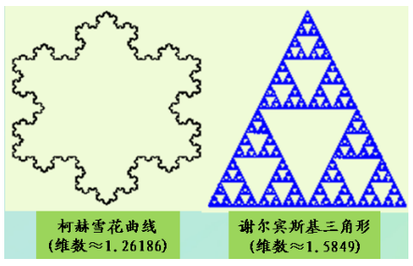
“柯赫曲线”的维数

在理论数学中，瑞典数学家柯赫（Koch）在 1904 年构造了如今称之为“柯赫曲线”的几何对象：三等分一段线段；凸起中间的线段，形成一个等边三角形，等长折线总数为 4；对每一个折线不断做同样处理，折线总数为 4n，就可以得到“柯赫曲线”。对于折线总数为 4^n、每个折线长度为 $(1/3)^n$ 的“柯赫曲线”，其计算得到的豪斯道夫维度就是 $D=-\lg 4^n/\lg(1/3^n)=1.26186$。

“柯赫曲线”的任何一个局部都和整体相似，因此是一种典型的人造分形图形。

把“柯赫曲线”的首尾相连，就得到“柯赫雪花曲线”，其特点是总面积有限，总长度无限。

与“柯赫曲线”类似的人造分形图形还有不断分割等边三角形得到的谢尔宾斯基（Sierpinski）三角形，其特点是总周长趋于无穷，总面积却趋于零。



茱莉亚集合与曼德勃罗集合

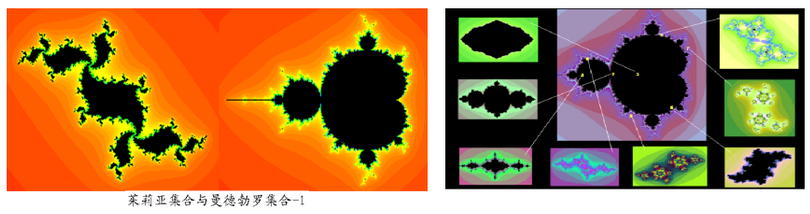
茱莉亚（Julia）集合由一个非线性复变函数生成：$\{Z_{n+1}=Z^2_n+C\}$，其中 C 为常数。在 Z 平面上任取一个点 Z_0，代入上式反复迭代，其结果在 Z 平面部分区域收敛，部分区域分散，收敛与分散区域的边界即为茱莉亚集合图形。

同一个 C、不同的 Z_0 会生成不同的茱莉亚集合，在 Z 平面上得到不同的图形。而不同的 C 和 Z_0 就构成了全部的茱莉亚集合，这就是曼德勃罗集合。

曼德勃罗图形上的每个点都代表茱莉亚集合迭代公式中不同的 C 值。因此给定一个 C，就能产生一个朱利亚集合。

分析上述现象可以看到，茱莉亚集合和曼德勃罗集合所显现出来的图形是极其复杂的，且存在着非常明显的自相似性。而这么复杂的图形是由一个非常简单的方程通过选择初值后反复迭代得到的结果。

可以反过来考虑两个问题：一个具有分形特征的自然现象是否可以认为是由一个非常简单的方程通过初值选择并反复迭代的结果？如果是，只要找到方程和初值，就可以随意地生成希望得到的图形？



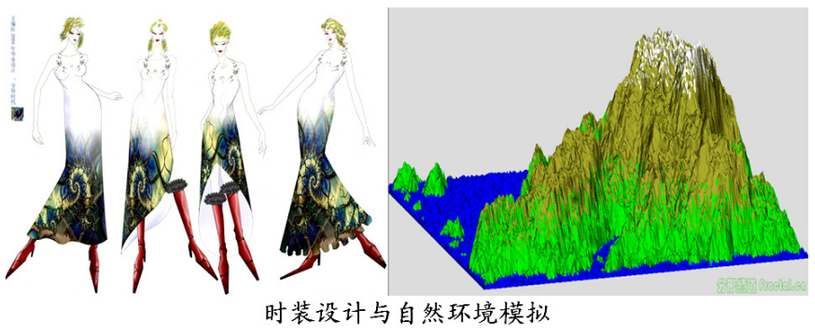
茱莉亚集合与曼德勃罗集合-1

分形理论的应用

图像处理：图像分割、压缩、边缘检测、分析与合成，目标识别等。

分形音乐：由一个算法的多重迭代可以产生的分形音乐，可以通过自相似原理来建构一些带有自相似小段的合成音乐，听起来很有趣。

分形艺术：用分形方法在计算机上可实现模拟自然景物、动画制作、建筑物配景、时装设计、IC 卡设计、房间装饰等，在影视制作中能生成奇峰异谷、独特场景，产生新奇美丽的景色。“分形艺术”与“电脑绘画”不同，它是纯数学产物，创作者除了需要数学功底外，还要有编程技能才能创作出具有自己风格的分形艺术图案。

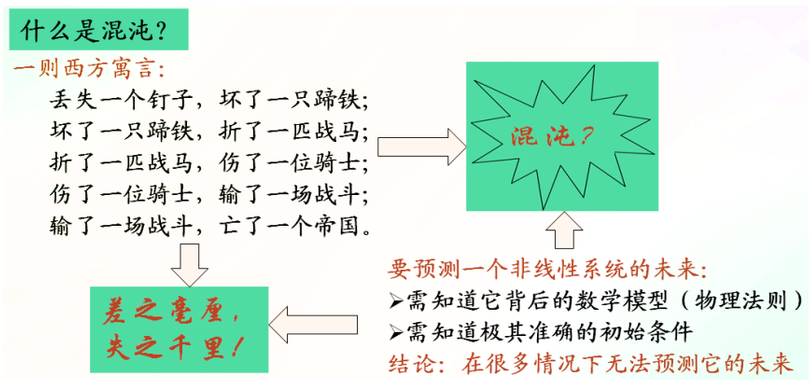


时装设计与自然环境模拟

分形原理

混沌理论

在自然界中，物体的运动并非都是按照确定性规律进行的。在许多情况下，物体的运动还表现出相当明显的偶然性、随机性。也就是说，仅仅认识到自然界运动规律的必然性、确定性是不够的，这种运动应该是确定性和随机性兼而有之。而混沌的存在，缩小了运动规律的确定论描述和概率论描述之间的鸿沟，揭示了有序与无序、确定与随机之间的统一。



什么是混沌

“混沌”是一种复杂的非线性现象，目前并没有统一、公认的定义。百度百科的说法是：混沌是指确定性动力学系统因对初值敏感而表现出的不可预测的、类似随机性的运动。混沌在统计特性上类似于随机过程，被认为是确定性系统中的一种内在随机性。

初值敏感性：初值的微小差别可能对以后的演化产生巨大影响，因此不可能准确预测将来某一时刻的动力学特性。

内在随机性：由确定性方程产生的随机性称之为内在随机性。

分形性：混沌运动中有大量的分形现象。

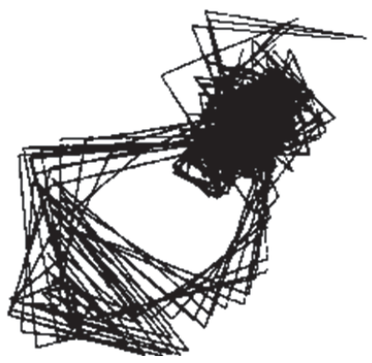
普适性：当系统趋于混沌时，所表现出的特征具有普适意义，即不因具体系统的不同和系统运动方程的差异而变化。

遍历性：混沌运动在有限时间内能够到达混沌区域内任何一点。

混沌理论的应用

更好的理解自然：例如，自然界大量存在的流体湍流现象。

可实现保密通讯，解释经济领域的股票、期货的价格波动，探索厄尔尼诺现象，与神经网络相结合创造出所谓的混沌神经网络。



混沌理论

混沌学的研究热潮始于 20 世纪 70 年代，但其渊源却可以追溯到 19 世纪末。

公认的最早发现混沌的是法国数学家和物理学家庞加莱（Poincare），他在研究天体力学，特别是在研究三体问题时，发现三体引力相互作用能产生惊人的复杂行为，确定性动力学方程的某些解具有不可预见性。

蝴蝶效应

1963 年，荷兰科学家洛伦兹（Lorenz）发表了“决定性的非周期流”的论文，讨论了天气预报的困难和大气湍流现象，提出了著名的洛伦兹方程，得到了洛伦兹吸引子。

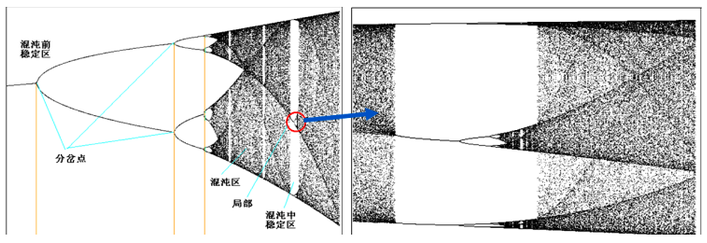
所谓吸引子的大概含义是：如果一个系统有朝某个稳态发展的趋势，这个稳态就是这个系统的吸引子。粗略的说：百川归海、落叶归根，这里的海和根就分别是百川和落叶的吸引子。

洛伦兹用数值方法揭示了该模型中存在的混沌运动，并发现初值的微小变化会导致系统在长时间运行以后完全不同，即解对初值的极端敏感性，这就是所谓的“蝴蝶效应”。

有人这样形容“蝴蝶效应”：亚马逊河流域热带雨林中的一只蝴蝶偶然煽动了翅膀，所引起的微弱气流可能会造成一周后纽约的龙卷风。

逻辑斯蒂映射

逻辑斯蒂（Logistic）映射又称为抛物线映射，是表现复杂非线性行为的典型映射之一，具体形式是：$X_n=kX_n(1-X_n)$，（其中 $0 \leqslant X_n \leqslant 1$，$0 < k \leqslant 4$）



逻辑映射

当 k 不大于 3 时，无论初始值是多少，多次迭代的最后结果总是稳定的，而且稳定状态不依赖于初始值。

当 k 超过 3 时，情况会发生变化：稳定状态分别变为 2、4、8 个数值……即出现了倍周期分岔现象。当 k 到 3.5699 左右时，倍周期分岔现象突然中断，出现混沌，且局部和整体之间具有明显的相似性，即具有分形现象。

混沌的特点

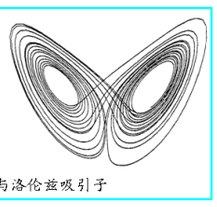
由此看来，混沌大致有下列特点：

在生命科学中的应用：已经发现各种心律不齐、房室传导阻滞等均与混沌运动有联系，癫痫患者发病时的脑电波呈现明显的周期性，而正常人的脑电波呈现显著的混沌状态。

与其他科学互相渗透，混沌学在生物学、心理学、数学、物理学、电子学、信息科学、天文学、气象学、军事学、音乐、艺术等领域都得到了广泛的应用。

有人称混沌理论是 20 世纪物理学三大理论之一，在相对论、量子力学、混沌理论中：

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x-y) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$



洛伦兹方程与洛伦兹吸引子

蝴蝶效应

相对论涉及的时空尺度太大，大得使“普通人”够不着；

量子力学涉及的时空尺度太小，小得使“普通人”看不见；

混沌理论却适用于“普通人”看得见、摸得到的身边世界。

小结

非线性科学几乎涉及了自然科学和社会科学的各个领域，正在改变人们的一些传统看法。了解一点相关知识，有助于扩展思维和眼界，更好地理解我们赖以生存的这个世界。

（作者单位为航空工业成都所）

地址：北京市东城区交道口南大街 67 号（100712） 社长：孙伟 总编：魏轶群 总编室主任：吴斌斌 58354180 广告 / 发行部：58354176 传真：58354167 投稿邮箱：news@cannews.com.cn 每周二、五出版 全年定价 288 元 广告经营许可证：京东工商广字第 0113 号 中国青年报印刷厂印刷